Solved Problems - Sampling (discrete time) PART 2

Linear systems and circuit applications

Discrete Time Systems

Luca Martino — luca.martino@urjc.es — http://www.lucamartino.altervista.org
Laura Cornejo — laura.cornejo@urjc.es
Óscar Ciordia — oscar.ciordia@urjc.es

Example 12

Write the Nyquest's inequalities for the following signal:

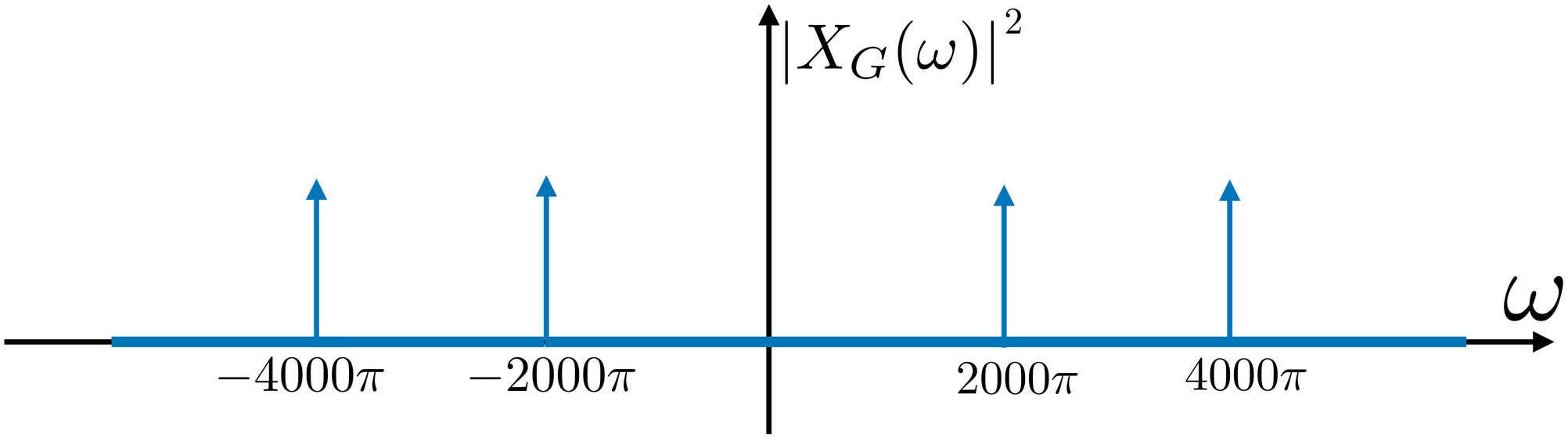
$$x(t) = \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$$

Example 12

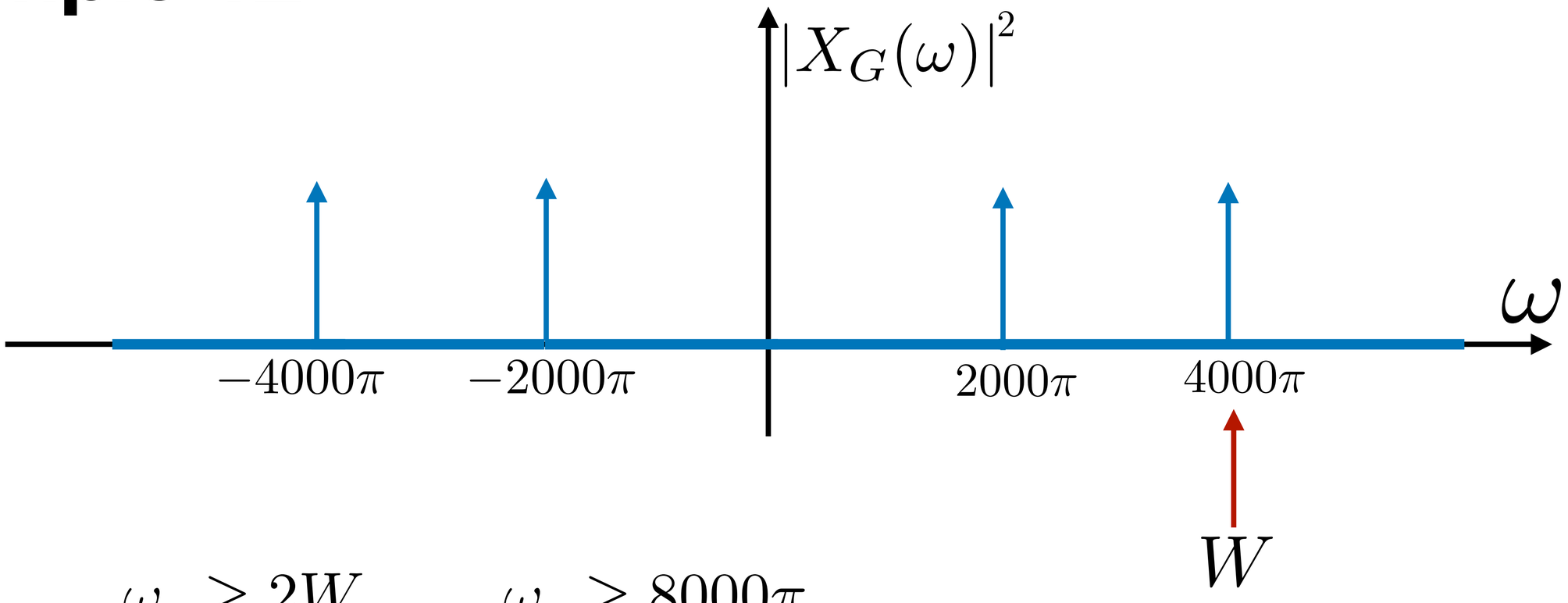
$$x(t) = \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$$

Generalized Fourier Transform:

$$X_G(\omega) = 2\pi\left(\frac{1}{2}\left(\delta(\omega - 2000\pi) + \delta(\omega + 2000\pi)\right) + \frac{1}{2j}\left(\delta(\omega - 4000\pi) - \delta(\omega + 4000\pi)\right)\right)$$



Example 12



$$\omega_s \geq 2W, \qquad \omega_s \geq 8000\pi,$$

$$T \leq \frac{\pi}{W}, \quad T \leq \frac{1}{4000} \quad \text{sec}$$

This is the solution.

Example 13

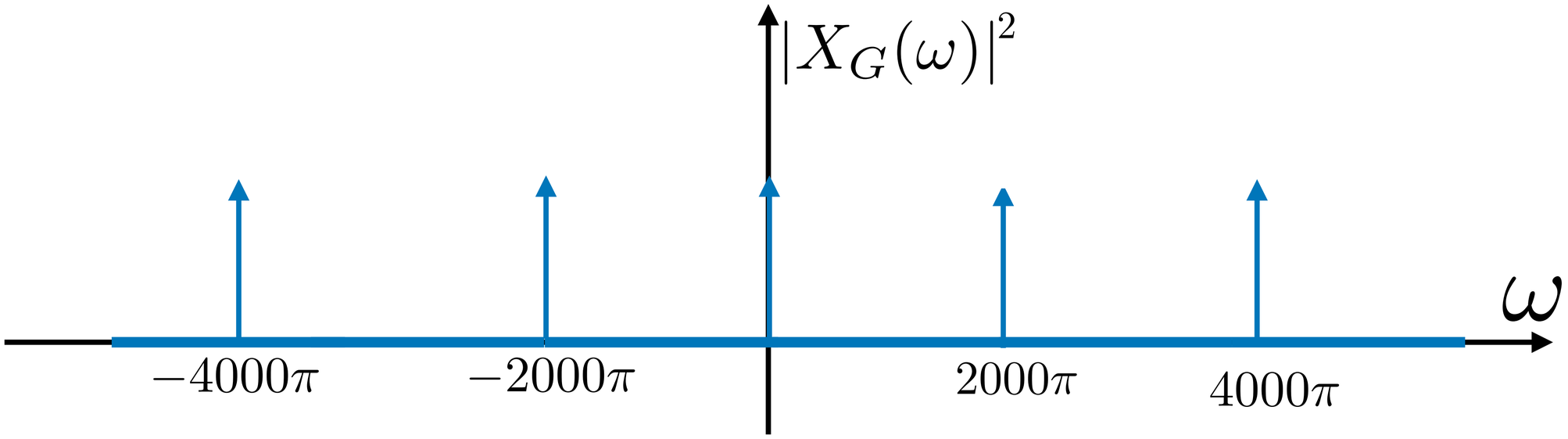
Write the Nyquest's inequalities for the following signal:

$$x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$$

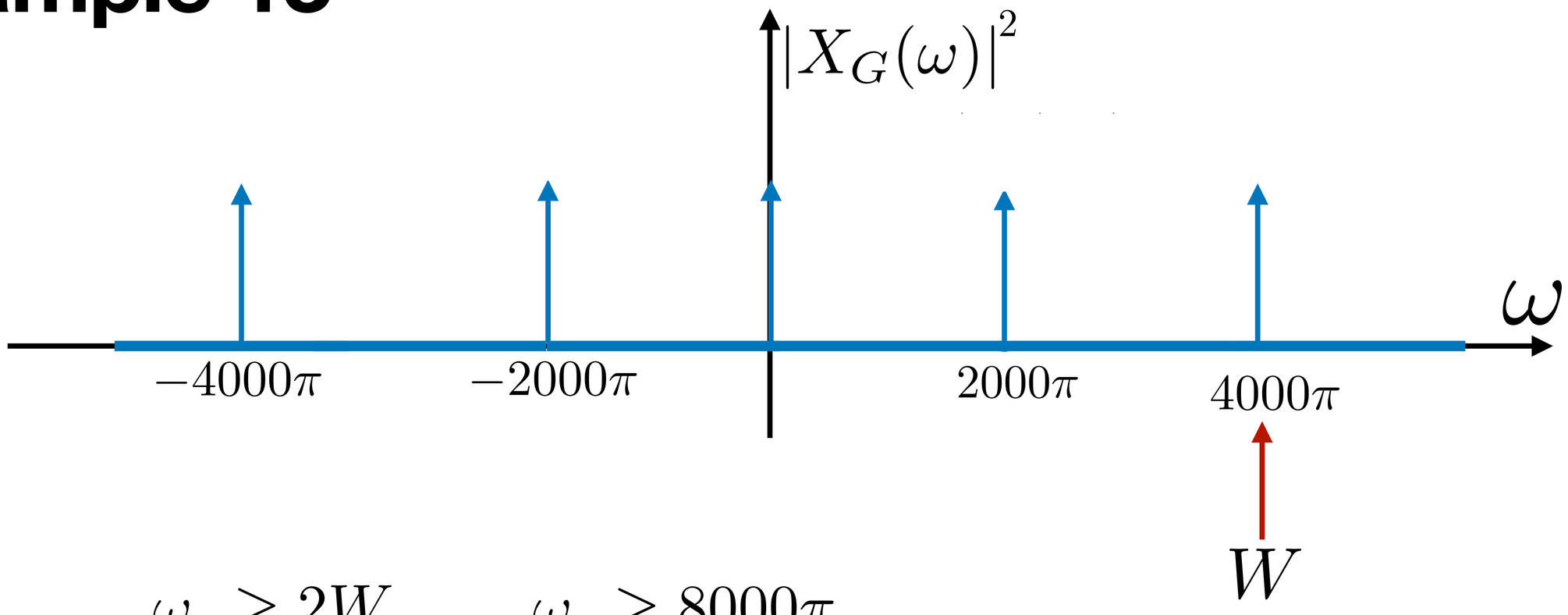
Example 13

$$x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$$

Generalized Fourier Transform:



Example 13



$$\omega_s \geq 2W, \qquad \omega_s \geq 8000\pi,$$

$$T \leq \frac{\pi}{W}, \quad T \leq \frac{1}{4000} \quad \text{sec}$$

This is the solution.

Example 14

Write the Nyquest's inequalities for the following signal:

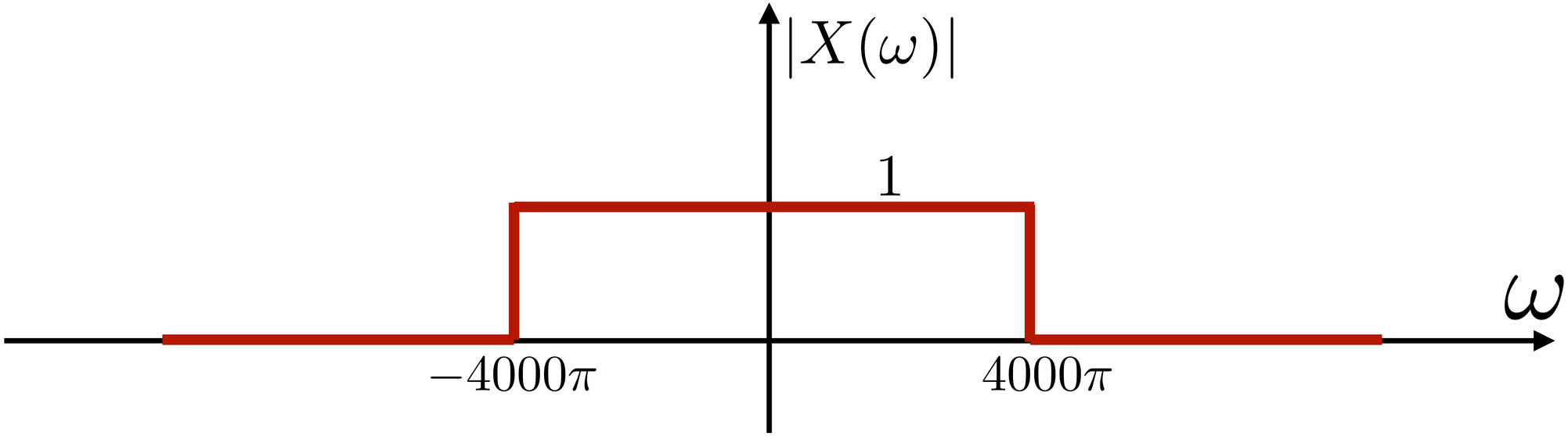
$$x(t) = \frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}$$

Example 14

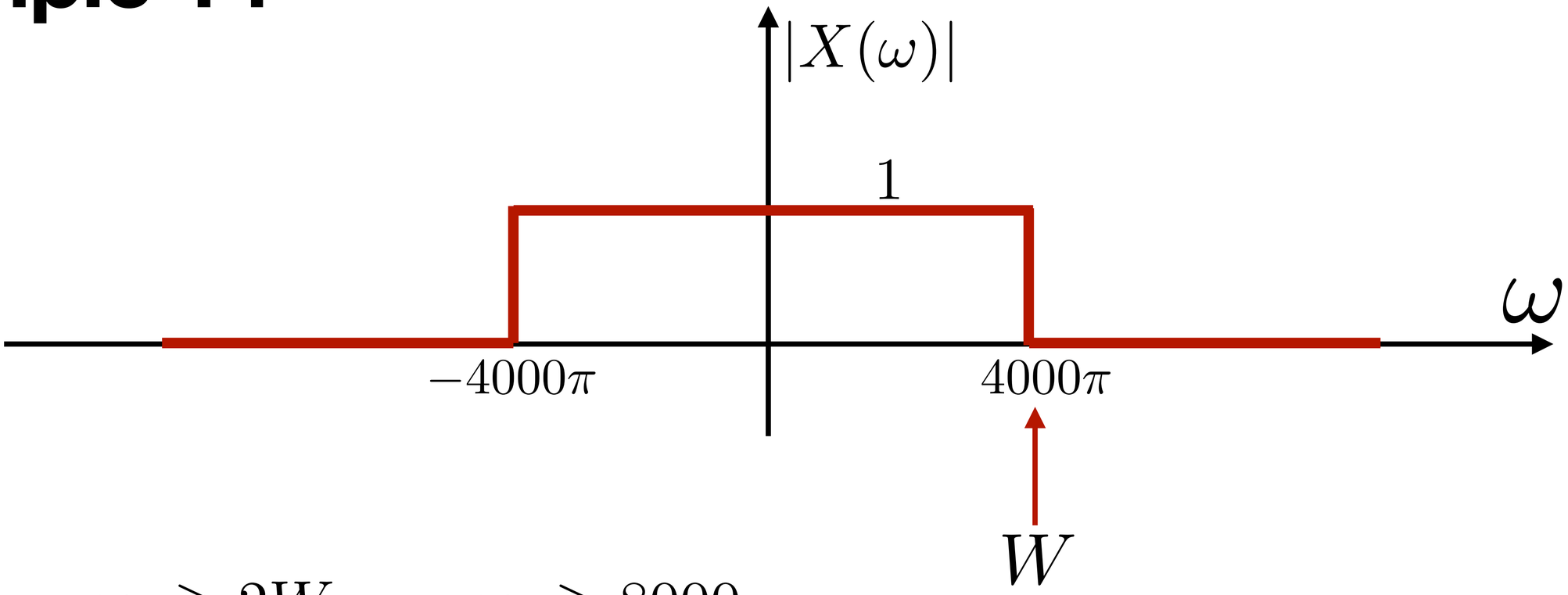
$$x(t) = \frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}$$

This a sinc !! a “octupus” signal in time (“pulpo” en el tiempo)

The FT of a sinc of a rectangle in frequency



Example 14



$$\omega_s \geq 2W, \qquad \omega_s \geq 8000\pi,$$

$$T \leq \frac{\pi}{W}, \quad T \leq \frac{1}{4000} \quad \text{sec}$$

This is the solution.

Example 15

Write the Nyquest's inequalities for the following signal:

$$x(t) = \left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t} \right)^2$$

Example 15

$$x(t) = \left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\right)^2$$

We can write the signal as:

$$x(t) = \underbrace{\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}}_{x_1(t)} \underbrace{\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}}_{x_2(t)}$$

Multiplication in time, it is a convolution in frequency:

$$X(\omega) = X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

Example 15

$$X(\omega) = X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

We have a convolution of two rectangles (clearly with finite lengths); for the properties of the convolution of functions with finite lengths the convolved function has finite lengths as well, with length the sum of lengths of each functions in the convolution. Then, this means:

$$|X(\omega)| = 0 \qquad \text{for all } |\omega| \geq 4000\pi + 4000\pi = 8000\pi$$

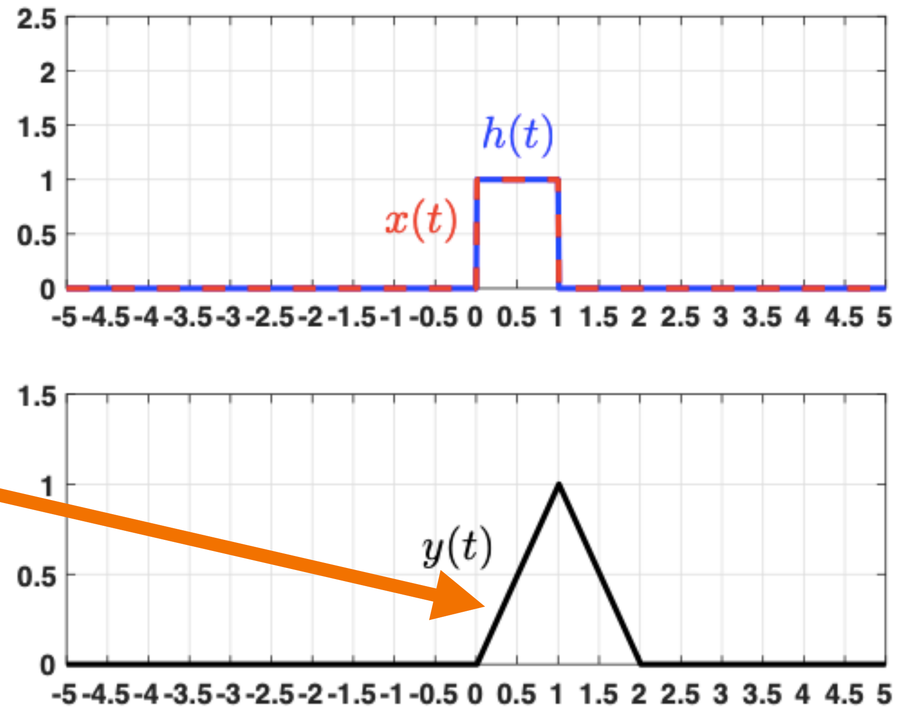
Example 15

$$|X(\omega)| = 0 \qquad \text{for all } |\omega| \geq 4000\pi + 4000\pi = 8000\pi$$

Just to understand "more", let just recall this example of convolution between two rectangles (this part is not needed for solving this problem):

$$x(t) = 1 \text{ if } t \in [0,1], \text{ otherwise } x(t) = 0$$
$$h(t) = 1 \text{ if } t \in [0,1], \text{ otherwise } h(t) = 0$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = ?$$



Length of the result of the convolution: 1+1=2 !!

Example 15

$$|X(\omega)| = 0 \quad \text{for all } |\omega| \geq 4000\pi + 4000\pi = 8000\pi$$

$$W$$

$$\omega_s \geq 2W, \quad \omega_s \geq 16000\pi$$

$$T \leq \frac{\pi}{W}, \quad T \leq \frac{1}{8000} \quad \text{sec}$$

This is the solution.

Example 16

Write the Nyquest's inequalities for the following signal:

$$x(t) = \left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t} \right)^3$$

Example 16

$$x(t) = \left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\right)^3$$

We can write the signal as:

$$x(t) = \underbrace{\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}}_{x_1(t)} \underbrace{\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}}_{x_2(t)} \underbrace{\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}}_{x_3(t)}$$

Multiplication in time, it is a convolution in frequency:

$$X(\omega) = X_1(\omega) * X_2(\omega) * X_3(\omega)$$

Example 16

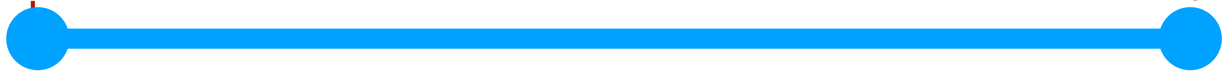
$$X(\omega) = X_1(\omega) * X_2(\omega) * X_3(\omega)$$

non-zero only ==> from -4000π to 4000π

from -4000π to 4000π

from -4000π to 4000π

non-zero only ==> from -8000π to 8000π



non-zero only ==> from -12000π to 12000π

Example 16

Then:

$$\omega_s \geq 2W, \quad \omega_s \geq 24000\pi$$
$$T \leq \frac{\pi}{W}, \quad T \leq \frac{1}{12000} \quad \text{sec}$$

This is the solution.

Example 17

La señal

$$x_c(t) = \text{sen}(2\pi 100t)$$

se muestrea con un periodo de muestreo de $T_s = 1/400\,\text{s}$ *y se obtiene una señal en tiempo discreto* $x[n]$. *¿Cuál es la señal resultante* $x[n]$*?*

Some other point of the problems are shown later.

Example 17

- $x[n] = x_c(t)|_{t=nT_s} = x_c(nT_s)$, así que

$$x[n] = \text{sen}\left(2\pi 100 n \frac{1}{400}\right) = \boxed{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)}$$

- El muestreo puede considerarse como el cambio de variable $t \to nT_s$, teniendo en cuenta que n es la variable discreta y, por tanto, sólo puede tomar valores enteros.

Example 17

- Interpretando el muestreo como un cambio de variable es posible hacer cálculos como los siguientes:

  1. ¿Cuántas muestras hay en t_0 s? Respuesta: $N = t_0/T_s$. Por ejemplo, si $T_s = 125\,\mu\text{s}$, en 20 ms hay $N = 20 \times 10^{-3}/125 \times 10^{-6} = 160$ muestras. Pero, ¡ojo!, N debe ser entero; no tiene sentido considerar un número no entero de muestras.
  2. ¿Qué valor de n se corresponde con t_0 s? Respuesta: $n_0 = t_0/T_s$, el mismo cálculo que en el párrafo anterior. Evidentemente, n_0 debe ser entero; si no, no existe tal correspondencia. Por ejemplo, si $T_s = 125\,\mu\text{s}$, ¿qué muestra se corresponde con 200 µs. Se puede calcular $n_0 = 20 \times 10^{-3}/125 \times 10^{-6} = 1.6$; pero el instante de tiempo t_0 no coincide con ninguna muestra.
  3. ¿Qué valor de t se corresponde con la muestra n_0? Respuesta: $t_0 = n_0 T_s$, por ejemplo, si $T_s = 125\,\mu\text{s}$, la muestra $n_0 = 1000$ se corresponde con $t_0 = 1000 \cdot 125 \times 10^{-6}\,\text{s} = 125\,\text{ms}$.

NOTA IMPORTANTE: El cambio de variable $t \to nT_s$ no es invertible; es decir, $x[n] = x_c(nT_s)$ es correcto, pero escribir $x_c(t) = x[t/T_s]$, suponiendo que se puede hacer el cambio $n \to t/T_s$, es una auténtica *burrada*. ¡¡Tomar muestras no es el proceso inverso de interpolar paso bajo!!

Example 18

La secuencia

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \ -\infty < n < \infty$$

se obtiene muestreando la señal en tiempo continuo

$$x_c(t) = \cos\left(\omega_0 t\right), \ -\infty < n < \infty$$

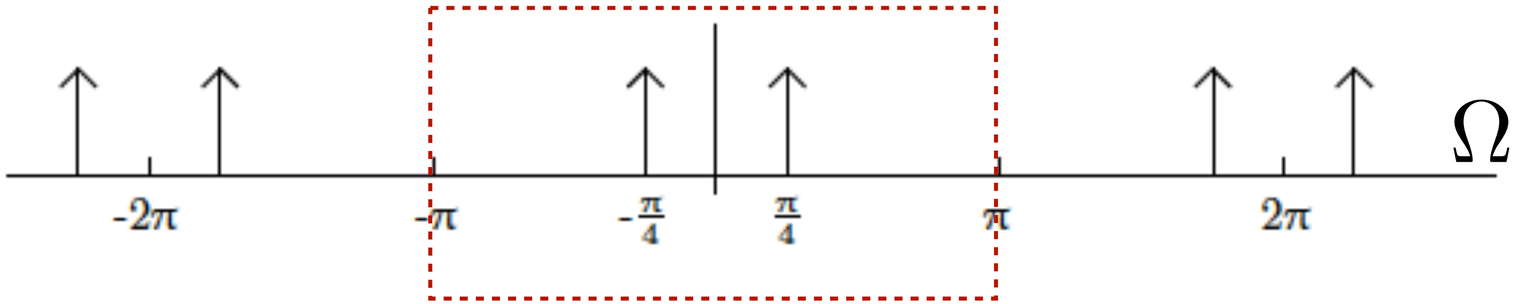
con una frecuencia de $1000\,\text{muestras/s}$. *Indique dos posibles valores de* ω_0 *que podrían producir la secuencia* $x[n]$.

Example 18

- La frecuencia de muestreo es de 1000 muestras/s o lo que es lo mismo $f_s = 1000\,\text{Hz}$; por tanto $T_s = 1/f_s = 10^{-3}\,\text{s}$.
- En general $x[n] = \cos(\Omega_0 n) = \cos(\omega_0 n T_s) \Rightarrow \Omega_0 = \omega_0 T_s \Rightarrow \omega_0 = \Omega_0/T_s = \Omega_0 f_s$ Here, $\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$
- Supongamos que la secuencia proviene de un muestreo correcto, es decir con una frecuencia superior a la tasa de Nyquist. En este caso: $\omega_0 = (\pi/4)1000 = 250\pi = \boxed{2\pi 125\,\text{rad/s}}$, que se corresponde con una frecuencia $f_0 = 125\,\text{Hz}$. Comprobamos que la frecuencia de muestreo es superior a la tasa de Nyquist, $f_s \geq f_N = 2f_0 = 250\,\text{Hz}$.

  El espectro de $x[n]$ tendrá la siguiente forma:

$|X(\Omega)|$ recall that actually is a GFT $|X_G(\Omega)|$

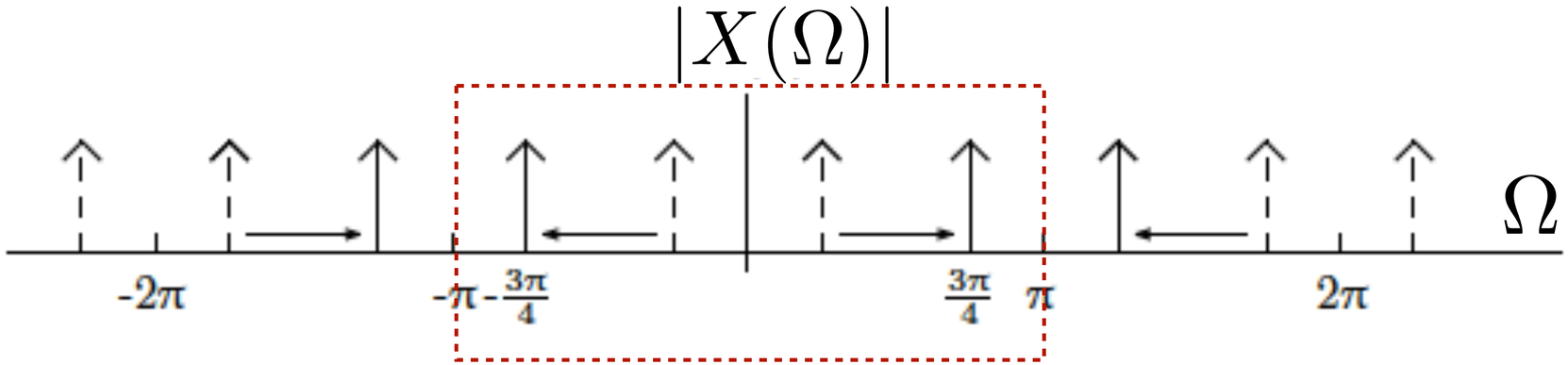


Example 18

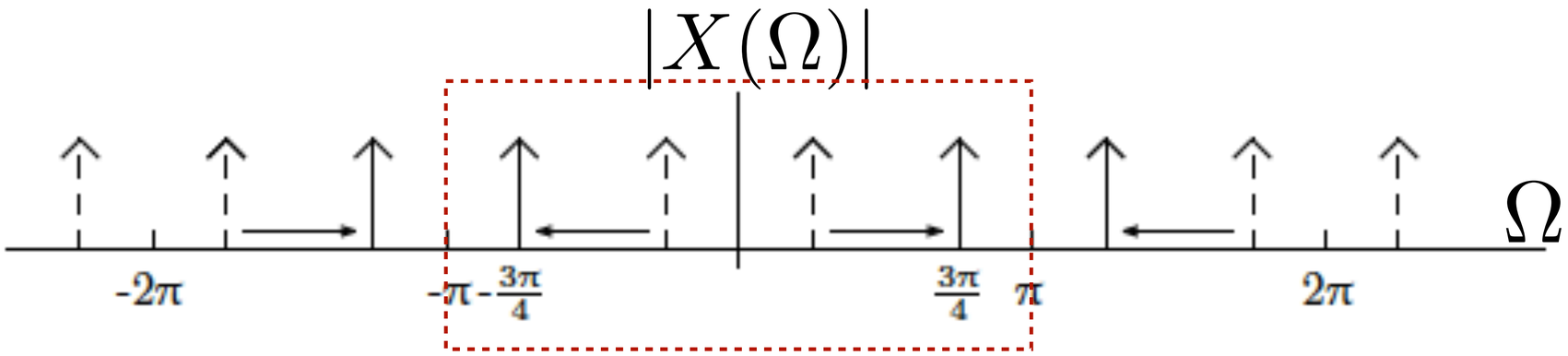
Starting a discussion to see what happens in the case that we are not fulfilling Nyquist….

- El espectro de la figura puede obtenerse también a partir de otras frecuencias ω_i manteniendo el mismo periodo de muestreo T_s. En efecto, si aumentamos la frecuencia continua ω_i la frecuencia discreta aumentará en la misma proporción ya que $\Omega_i = \omega_i T_s$ Así, por ejemplo, para $\omega_{i1} = 500\pi$, la frecuencia discreta será $\Omega_{i1} = \pi/2$, para $\omega_{i2} = 750\pi$ será $\Omega_{i2} = 3\pi/4$.

  Nótese que el resultado en el espectro es el desplazamiento de las deltas hacia la derecha y hacia la izquierda, como se muestra en la siguiente figura, en la que las deltas originales se han dibujado con líneas discontinuas, las deltas correspondientes a Ω_{i2} en trazo continuo y el desplazamiento de deltas con flechas horizontales.



Example 18



Si la frecuencia continua Ω_i se sigue incrementando, llegará un momento en el que el espectro de $x[n]$ tenga exactamente la misma forma que el espectro original, porque las nuevas deltas se situarán en el mismo lugar que ocupaban las originales. Puede verse fácilmente que esto ocurrirá cuando la frecuencia discreta de las nuevas deltas sean $\Omega_1 = -\pi/4 + 2\pi$ o $\Omega_2 = \pi/4 + 2\pi$. Si la frecuencia continua se incrementa aún más, el espectro vuelve a ser el mismo cuando las nuevas deltas se sitúan en $\Omega_1 = -\pi/4 + 4\pi$ o $\Omega_2 = \pi/4 + 4\pi$, o, en general, en $\Omega_1 = -\pi/4 + 2\pi k$ o $\Omega_2 = \pi/4 + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{N}$.

- Todas las nuevas frecuencias ω_i cuyo espectro coincide con el original son "alias" de la frecuencia original ω_0 Nótese que es condición necesaria que el desplazamiento de las deltas supere la frecuencia discreta π, lo que supone un muestreo a frecuencia inferior a la tasa de Nyquist.

Example 18

- THIRD possibility - tercera posibilidad: En el caso de que la señal a muestrear sea un coseno hay otra forma de generar una secuencia alias debido a la paridad de la función; i.e. $\cos(\Omega_0 n) = \cos(-\Omega_0 n)$. En el espectro $\delta(\Omega - \Omega_0)$ y $\delta(\Omega + \Omega_0)$ intercambian sus posiciones si se cambia Ω_0 por $-\Omega_0$. Por tanto, las frecuencias $\Omega_k = -\Omega_0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ también producen un espectro idéntico al original.

- En definitiva, para una señal coseno, las frecuencias alias vienen dadas por $\Omega_{k\pm} = 2\pi k \pm \Omega_0, k \in \mathbb{Z}$. Teniendo en cuenta lo indicado en los párrafos anteriores otros dos posibles valores de frecuencia continua que generan la misma secuencia son, *por ejemplo - for instance*:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)n\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{4}n\right)$$

$$\omega_1 = 9\pi/4 \cdot 1000 = 2250\pi = \underline{2\pi 1125} \quad \text{rad}$$

and

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}n\right) = \cos\left(\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)n\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}n\right)$$

$$\omega_2 = 7\pi/4 \cdot 1000 = 1750\pi = \underline{2\pi 875} \quad \text{rad}$$

- En ambos casos, las señales continuas estarían mal muestreadas - The Nyquist's condition is not satisfied; es decir, muestreadas con una frecuencia inferior a la tasa de Nyquist.

Example 19

La señal en tiempo continuo

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$$

se muestrea con periodo T_s *y se obtiene la señal en tiempo discreto*

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

(a) *Determine un valor de* T_s *que sea consistente con esta información.*

(b) *¿Es único el valor de* T_s *obtenido en (a)? Si es así, explique por qué. Si no, indique otro valor de* T_s *que sea consistente con la información dada.*

Example 19

Este problema es similar al anterior (similar to the previous problem), solo que en esta ocasión se mantiene la frecuencia continua fija y se varía la frecuencia de muestreo. Recuérdese que en el proceso de muestreo se produce la "normalización" de frecuencias $\Omega = \omega T_s$, por lo que es indiferente cambiar la frecuencia continua ω (como en el problema anterior) o el periodo de muestreo T_s (en este problema). Por lo tanto, los razonamientos son idénticos. Las respuestas sucintas serán: (a) Frecuencia superior a la tasa de Nyquist:

$$T_s = \Omega_0/\omega_0 = \frac{\pi/4}{4000\pi} = \frac{1}{12000} \text{ s . En efecto, } f_s = 1/T_s = 12\text{kHz} > 2f_0 = 4\text{kHz}$$

(b) T_s no es único. La secuencia $x[n]$ puede provenir de una se?al $x_{ci}(t)$, alias de $x_c(t)$, pero muestreada con solapamiento espectral. Por ejemplo, $x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)n\right)$, de donde $T_{s1} = \frac{7\pi/3}{4000\pi} = \frac{7}{12000}$ s. Teniendo en cuenta la paridad del coseno, otra posible secuencia es $x_2[n] = \cos\left(\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)n\right)$,

$$\text{de donde } T_{s2} = \frac{5\pi/3}{4000\pi} = \frac{5}{12000} \text{ s}$$

Questions?