Ubicándonos

- Tema 1: Señales y sistemas discretos en el dominio del tiempo
- Tema 2: Señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia
- **Tema 3: Muestreo**
  - 3.1 Muestreo de señales continuas
  - 3.2 Procesamiento en tiempo discreto de señales continuas
  - 3.3 Muestreo de señales discretas: diezmado e interpolación
- Tema 4: Fundamentos de la Transformada Discreta de Fourier
- Tema 5: Transformada Z
- Tema 6: Introducción al diseño de filtros discretos

Comentarios:

- Tema fundamental en la asignatura
- Resumen: “Hay que muestrear al doble del ancho de banda e interpolar con sincs”
- Trabajo previo: TF de tren de deltas y TFI de filtro paso bajo

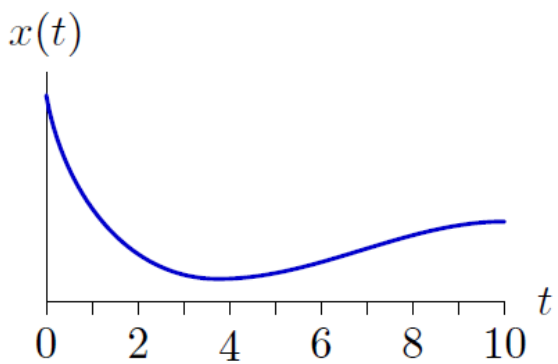
Ubicándonos

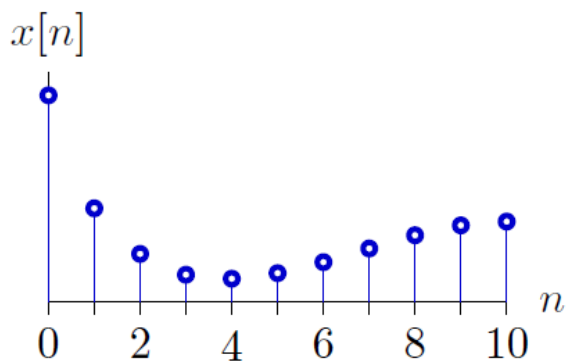
- **Tema 3: Muestreo**
  - **3.1 Muestreo de señales continuas**
    - **3.1.0 Introducción**
    - 3.1.1 Muestreo en el dominio del tiempo y de la frecuencia
    - 3.1.2 Recuperando la señal continua: interpolación
    - 3.1.3 Problemas y aspectos prácticos
  - 3.2 Procesamiento en tiempo discreto de señales continuas
  - 3.3 Muestreo de señales discretas: diezmado e interpolación

- Comentarios:
  - Bibliografía básica y complementaria: [BB2: Opp&Sch] Cap. 3, Secs. 3.0, 3.1, 3.2 y 3.4; [BB3: McC&Sch&Yod] Cap. 4, Secs. 4.1, 4.2 y 4.5; [BC3: Cha] Cap 7, Secs. 7.1, 7.2 y 7.3
  - Material de apoyo: Open course MIT (parte de la presentación utiliza material de OCW-MIT); Demos: http://users.ece.gatech.edu/mcclella/SPFirst/

Muestreo: interfaz continuo-discreto

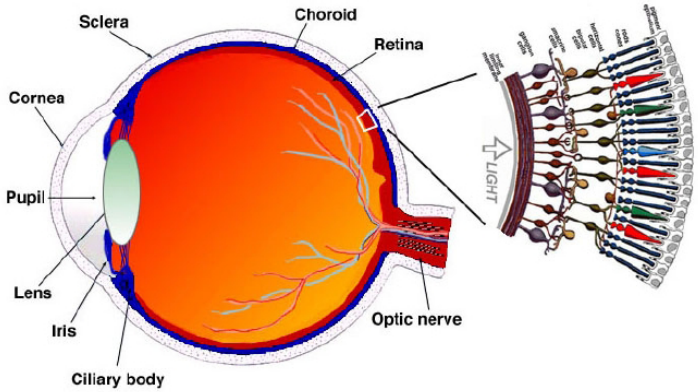
- Naturaleza de las señales: continua y discreta
  - C: voltajes, corrientes, voz, …
  - D: hora a la que se pone el sol, precio de cierre de una acción, secuencia genética
- Aparentemente, vivimos en un mundo de naturaleza continua
  - El tiempo es una variable física continua
- Los ordenadores: información digital ➔ representación discreta
  - SD pero pueden representar info de SC
- ¿Cómo convertimos una señal continua en una discreta? ➔ Muestreo

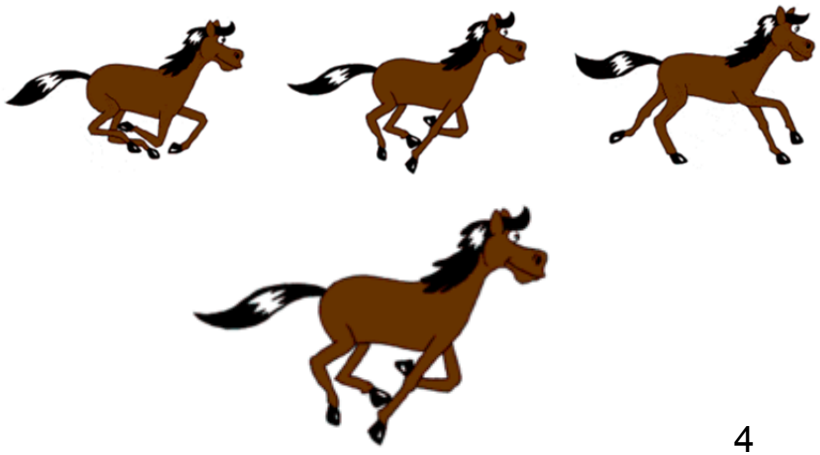




Muestreo omnipresente

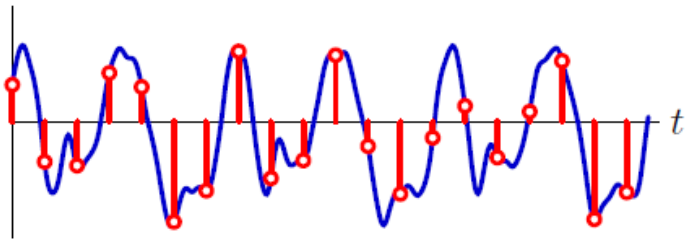
- El muestreo está presente en nuestro día a día
  - Imágenes de alta resolución
  - Dibujos animados
  - Nuestra propia retina

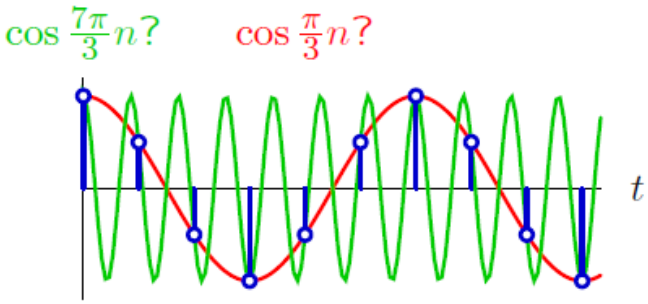




Preguntas clave

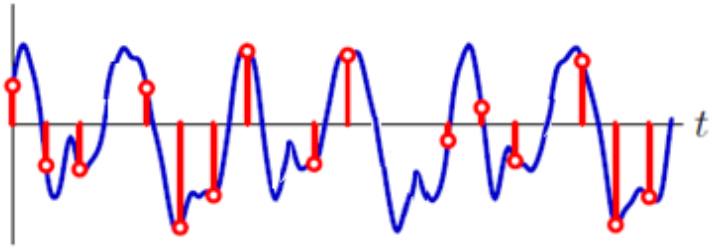
- A) Dada una señal continua ¿podemos discretizarla sin perder información?
  - ¿No perder información? ➔ Seguir representando "lo mismo"

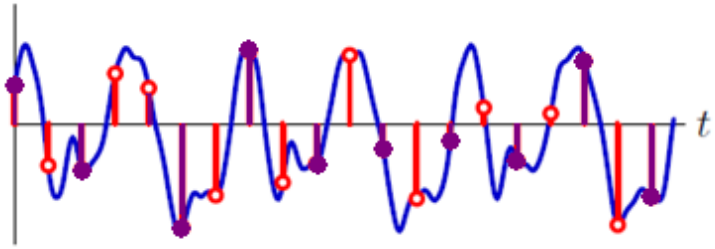




  - Para nosotros: que a partir de las muestras se pueda recuperar la señal original

- B) ¿Cómo muestreamos?





  - Para nosotros: muestreo regular ➔ Periodo de muestreo T (frecuencia $\omega_s = 2\pi/T$)

Objetivos de la primera parte

- Objetivo de esta clase: entender el proceso de muestreo
  - INGENIERÍA: MODELAR + ANALIZAR + DISEÑAR

- Para ello, en la clase de hoy:
  1. Modelo del muestreo en el dominio del tiempo
  2. Análisis del muestreo en el dominio de la frecuencia
  3. Reconstrucción en el dominio de la frecuencia
  4. Reconstrucción en el dominio del tiempo
  5. Teorema de muestreo

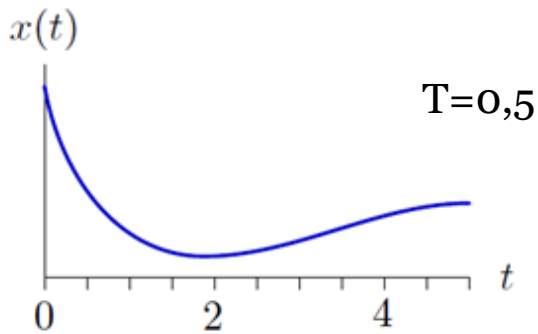
Ubicándonos

- **Tema 3: Muestreo**
  - **3.1 Muestreo de señales continuas**
    - 3.1.0 Introducción
    - **3.1.1 Muestreo en el dominio del tiempo y de la frecuencia**
    - 3.1.2 Recuperando la señal continua: interpolación
    - 3.1.3 Problemas y aspectos prácticos
  - 3.2 Procesamiento en tiempo discreto de señales continuas
  - 3.3 Muestreo de señales discretas: diezmado e interpolación

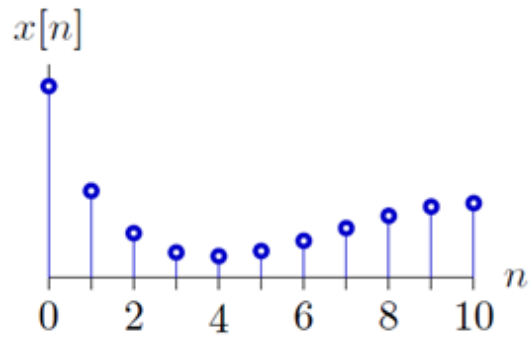
Cuidado! el muestreo es siempre en el tiempo pero vamos a ver que pasa en frecuencia

Muestreo en el dominio del tiempo

- Relación entre SC y SD muestreada a un periodo T



T=0,5 seg



x[0] = x(0)
x[1] = x(0,5)
x[2] = x(1)
x[3] = x(1,5)

$$x(t) \rightarrow x[n]$$

¿Expresión para x[n]?

Si T=0,25 seg

x[-1] = x(-0,25)
x[0] = x(0)
x[1] = x(0,25)
x[2] = x(0,50)

Si ω_s=10π rad/seg

x[-1] = x(-0,2)
x[0] = x(0)
x[1] = x(0,2)
x[2] = x(0,4)

Si T=0,5 y x(t)=$(1/4)^t$u(t)

x[-1] = x(-0,5) = 0
x[0] = x(0) = 1
x[1] = x(0,5) = 1/2
x[2] = x(1) = 1/4

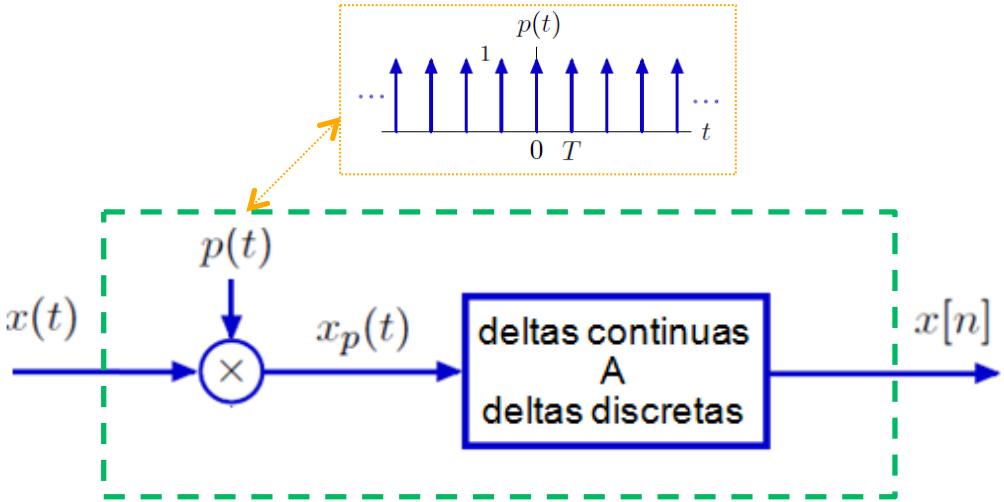
Muestreo en el dominio de la frecuencia

- ¿Relación entre la TFC de $x(t)$ y la TFD de $x[n]$?

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega) \qquad x(t) \rightarrow x[n] = x(nT)$$

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega}) \qquad X(j\omega) \rightarrow X(e^{j\Omega}) = \ ?$$

- Para contestar: vamos a dividir el proceso de muestreo en dos pasos*



<u>Paso 1</u>: de $x(t)$ a $x_p(t)$

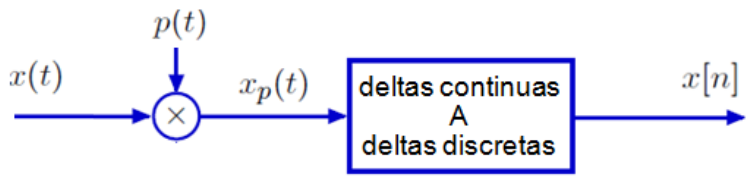
<u>Paso 2</u>: de $x_p(t)$ a $x[n]$

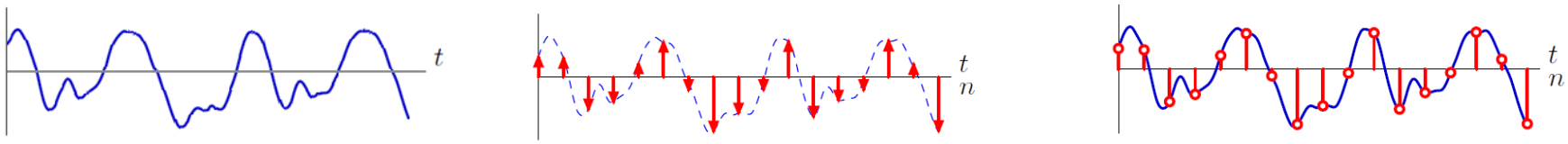
$$\boxed{x[n] = x(nT)}$$

*Importante: los sistemas reales no implementan estos dos pasos, nosotros lo modelamos así para entender mejor lo que está pasando

Muestreo en el dominio de la frecuencia

- Es decir, que vamos a modelar el muestreo como:





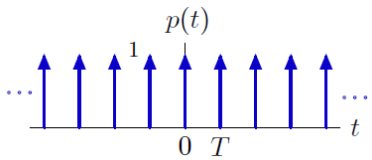
- Una vez que lo hemos separado en dos pasos:
  - Paso 1: relación entre $x(t)$ y $x_p(t)$ ➔ relación entre $X(j\omega) \rightarrow X_p(j\omega)$
  - Paso 2: relación entre $x_p(t)$ y $x[n]$ ➔ relación entre $X_p(j\omega) \rightarrow X(e^{j\Omega})$

Expresiones clave:

$$x[n] = x(nT) \qquad x_p(t) = x(t) \cdot p(t) \qquad p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Paso 1: de SC a secuencia de deltas C

- Sabemos que: $x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$



$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

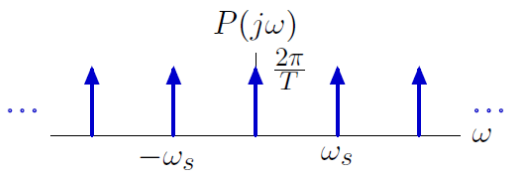
- Analicemos:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

Propiedad de modulación

TFC de señales periódicas (DSFC)

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$



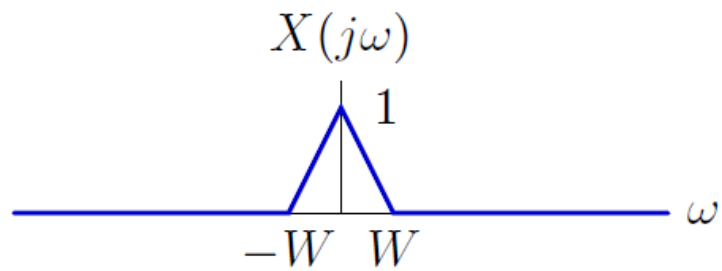
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Paso 1: gráficamente

Multiplicar por un TD en tiempo

⇕

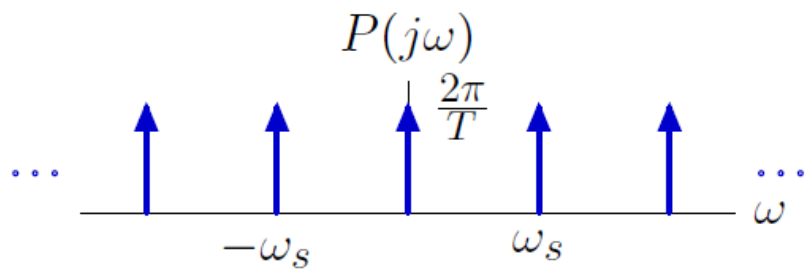
Convolucionar por un TD en frecuencia



Señal <u>limitada en banda:</u>

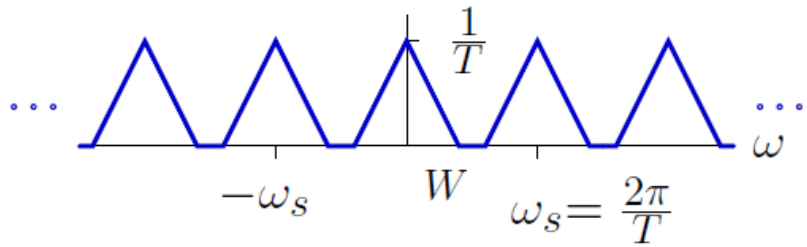
$$X(j\omega) = 0$$

$$|\omega| > W$$



<u>Intuición:</u> muestreo continuo genera réplicas en frecuencia

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$



Las réplicas están centradas en la frecuencia de muestreo

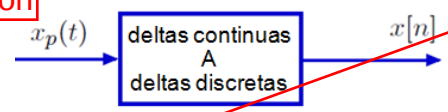
Paso 2: de sec. de deltas C a sec. de deltas D

- Tiempo:

$$x_p(t) = x(t)\cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)$$

Relación

- Analicemos en frecuencia:



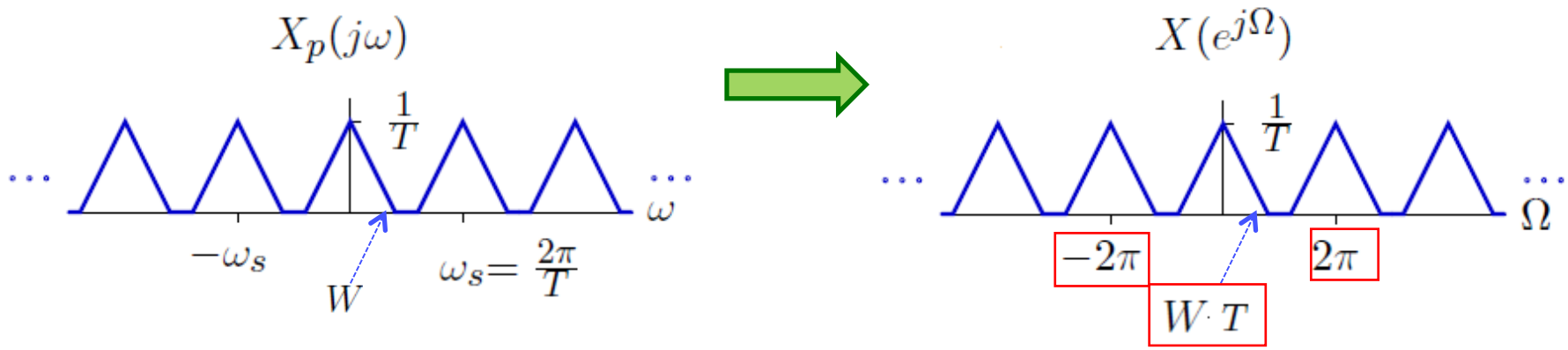
TFC	TFD
$X_p(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)} e^{-j\omega t} dt$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) e^{-j\omega t} dt}$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \boxed{e^{-j\omega nT}}$ transf. delta despazada	$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$

Intuición:
consistencia de unidades

$$\boxed{X_p(j\omega) = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\omega T} \qquad X(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}}}$$

Paso 2: gráficamente

$$X(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega)\big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}}$$



Comentarios:

- Eje de ordenadas: no cambia
- Eje de abcisas:
  - Unidades de [rad/seg] a [rad]
  - Para pasar de la izda la dcha

multiplicamos por T ➔ expansión

Muestreo en ~~frecuencia~~: solución

- ¿Relación entre la TF de $x(t)$ y la TF de $x[n]$?

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega) \qquad x(t) \rightarrow x[n] = x(nT)$$

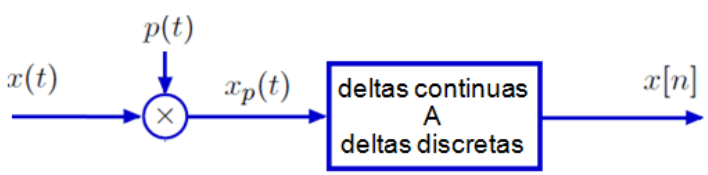
$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega}) \qquad X(j\omega) \rightarrow X(e^{j\Omega}) = \ ?$$

- Paso 1 + Paso 2

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

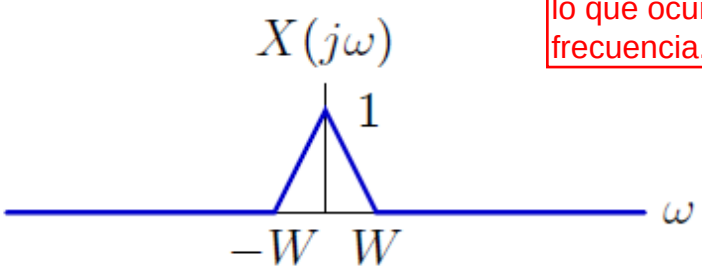
$$X(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega)\big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}}$$

$$\boxed{X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right)\right)}$$

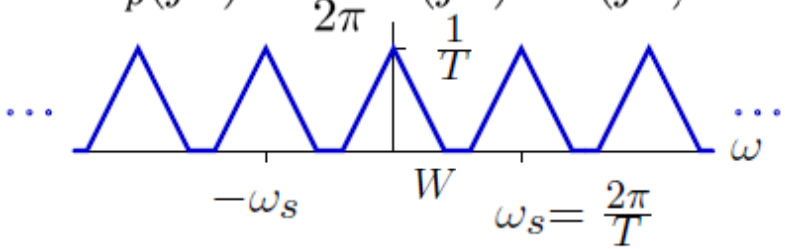


Muestreo en ~~frecuencia~~: solución (gráficamente)

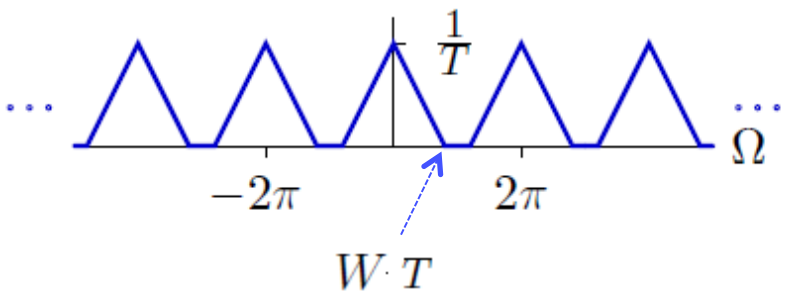
lo que ocurre en frecuencia....



$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$



$$X(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega)\big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}}$$



Efectos:

- Periódica con periodo 2π
- Divide su amplitud por un factor T
- Se expande por un factor T

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right)\right)$$

Recapitulemos

- Preguntas clave:
  - A) ¿Cuándo podemos recuperar la SC a partir de la SD?
  - B) ¿Cómo muestreamos?

- Clave: MODELAR + ANALIZAR + DISEÑAR

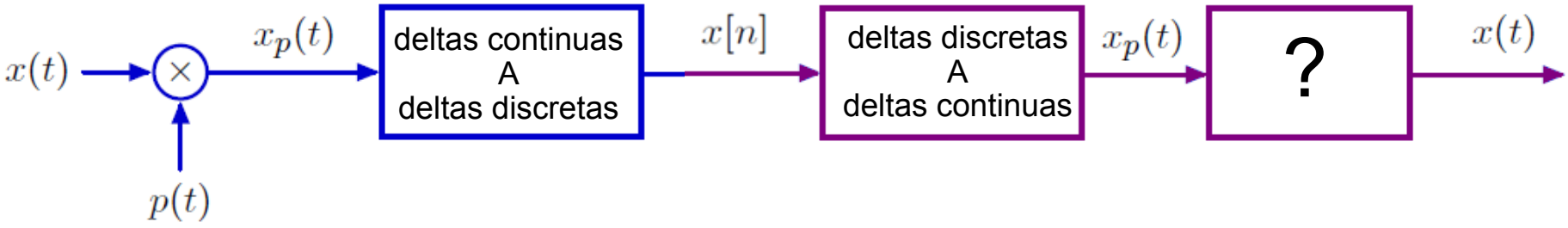
- Durante la clase de hoy:
  1. Modelo del muestreo en el dominio del tiempo
  2. Análisis del muestreo en el dominio de la frecuencia
  3. Reconstrucción en el dominio de la frecuencia
  4. Reconstrucción en el dominio del tiempo
  5. Teorema de muestreo

Ubicándonos

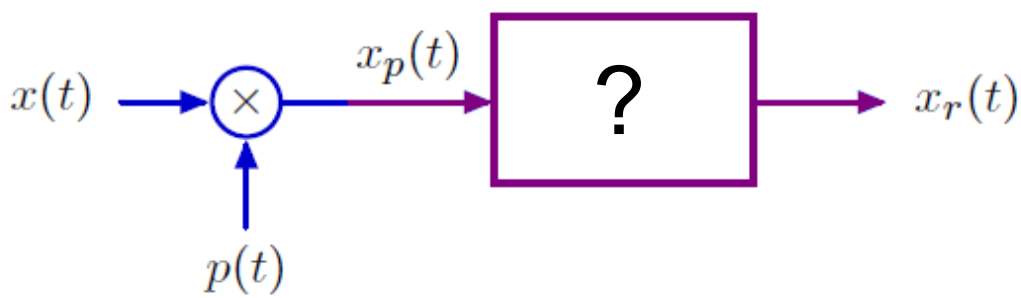
- **Tema 3: Muestreo**
  - **3.1 Muestreo de señales continuas**
    - 3.1.0 Introducción
    - 3.1.1 Muestreo en el dominio del tiempo y de la frecuencia
    - **3.1.2 Recuperando la señal continua: interpolación**
    - 3.1.3 Problemas y aspectos prácticos
  - 3.2 Procesamiento en tiempo discreto de señales continuas
  - 3.3 Muestreo de señales discretas: diezmado e interpolación

Recuperando la señal continua

- ¿De SD a SC? ➔ Camino contrario al de SC a SD ➔ Interpolar



- Bastará con que analicemos

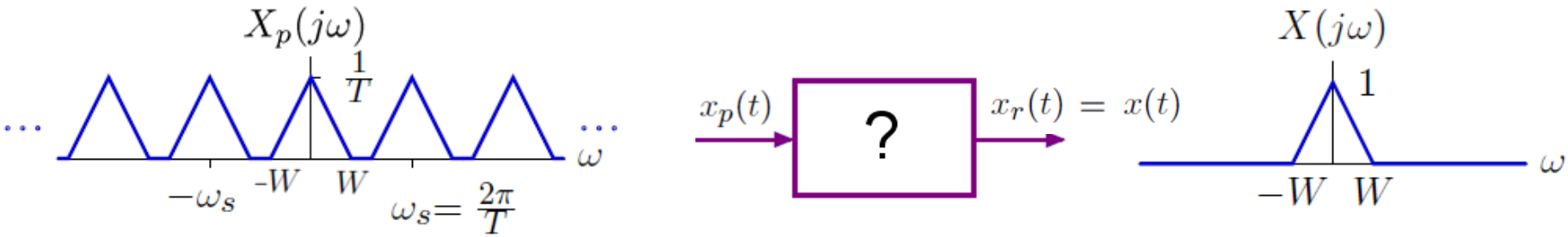


Objetivo de diseño:

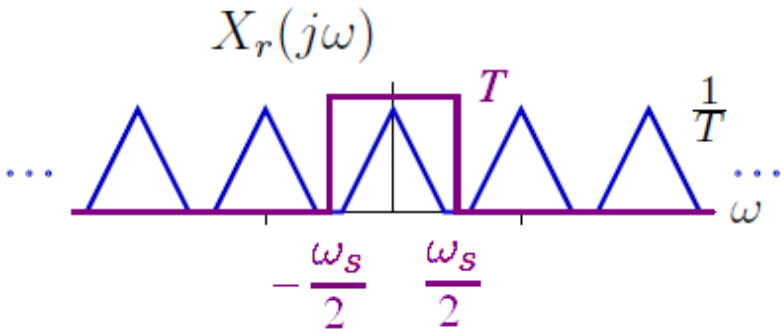
$$x_r(t) = x(t)$$

- Primero lo analizaremos en el dominio de la frecuencia

Recuperando la señal continua: gráficamente



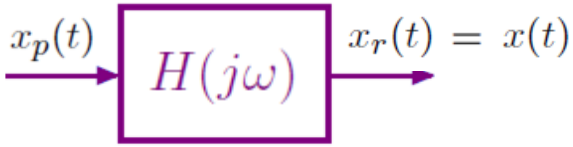
- <u>Queremos</u>: misma forma, eliminar las réplicas, cambiar la amplitud ➔
  - Solución: Filtro paso bajo



$$H(j\omega) = \begin{cases} T & \text{si} \quad |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & \text{si} \quad |\omega| \geq \omega_s/2 \end{cases}$$

$$X_r(j\omega) = H(j\omega)X_p(j\omega)$$

Recuperando la señal continua: tiempo

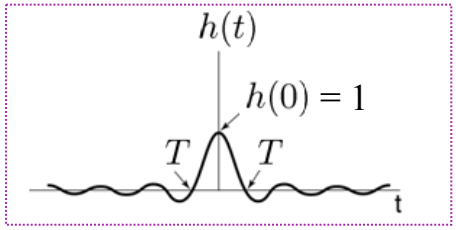


$$H(j\omega) = \begin{cases} T & \text{si} \quad |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & \text{si} \quad |\omega| \geq \omega_s/2 \end{cases}$$

$$X_r(j\omega) = H(j\omega)X_p(j\omega)$$

- Filtro paso bajo ➔ Convolucionar con la respuesta al impulso

$$x(t) = x_p(t) * h(t) \quad \text{donde} \quad h(t) = \frac{T\sin(\pi t/T)}{\pi t}$$

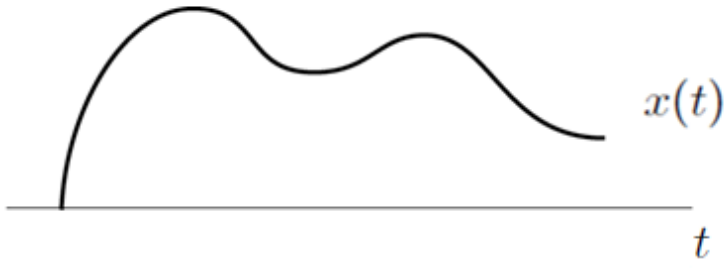


$$= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \right) * h(t)$$

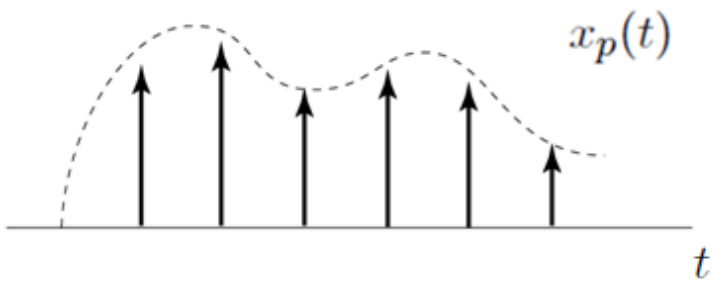
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \; \frac{T\sin(\pi(t/T - n))}{\pi(t - nT)}$$

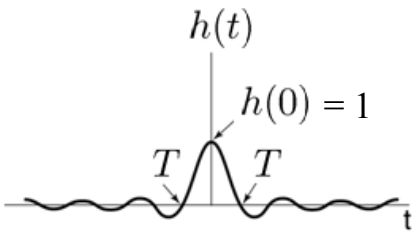
Recuperando la SC: tiempo gráficamente

SC original

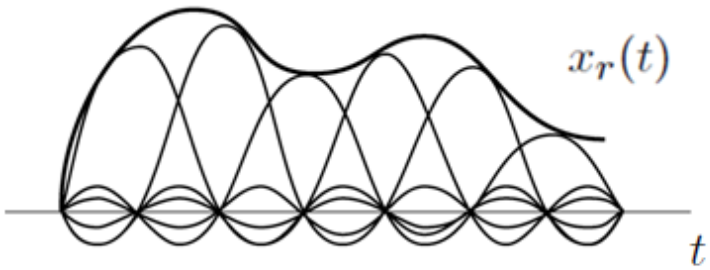


Muestreada



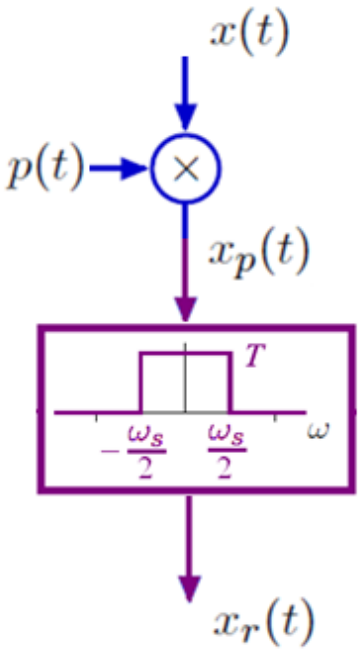


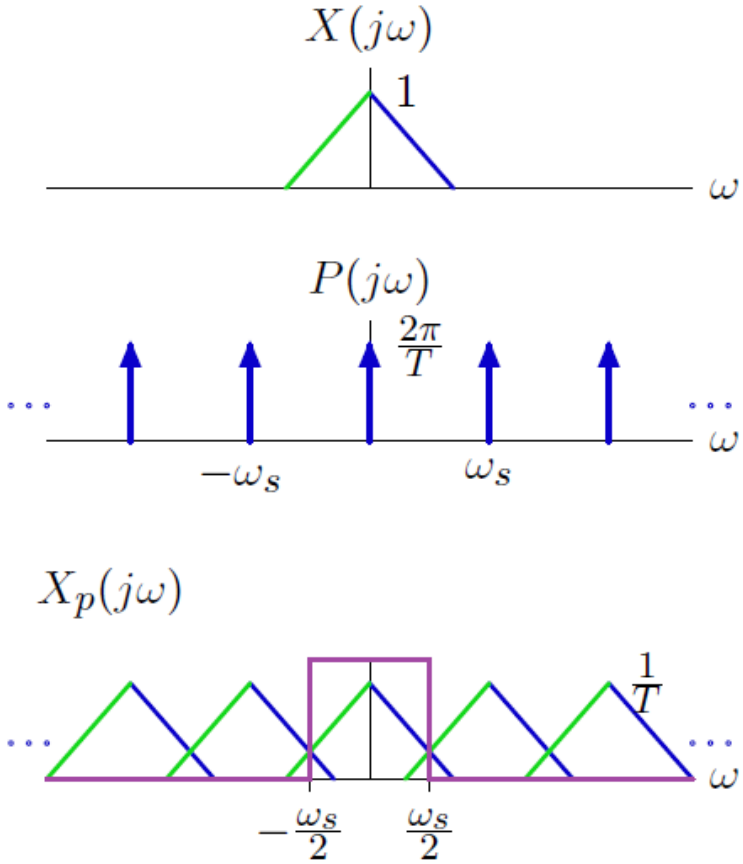
Reconstruida (tras pasar por FPB)



Problemas en la reconstrucción

- Pero… ¿podemos siempre recuperar la señal original?



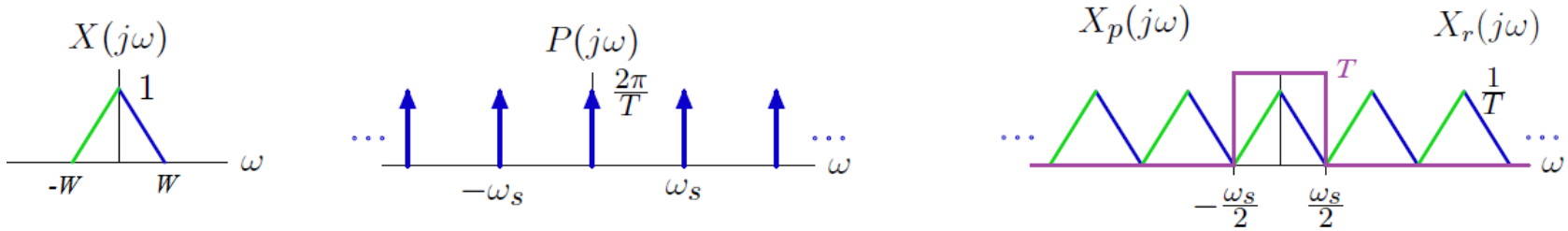


¡Solapamiento espectral!

$$X_r(j\omega) = H(j\omega)X_p(j\omega) \neq X(j\omega)$$

Solapamiento y Teorema de muestreo

- Podremos recuperar la señal original en función del BW de la señal y de la frecuencia de muestreo



  - ¿Qué pasa si W es muy grande? ➔ No podemos
  - ¿Qué pasa si la señal no es de banda limitada? ➔ No podemos

- **<u>Teorema de muestreo (Nyquist-Shannon)</u>:**

Sea $x(t)$ una señal limitada en banda, es decir $x(t)$ satisface $X(j\omega) = 0 \ \forall \ |\omega| > W$

Entonces, $x(t)$ puede recuperarse a partir de sus muestras $x[n]=x(nT)$ si se cumple que

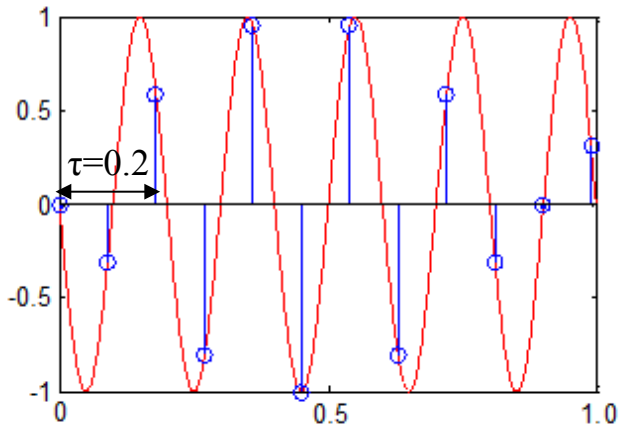
$$\omega_s/2 > W \Rightarrow \omega_s > 2W \Rightarrow T < \pi/W$$

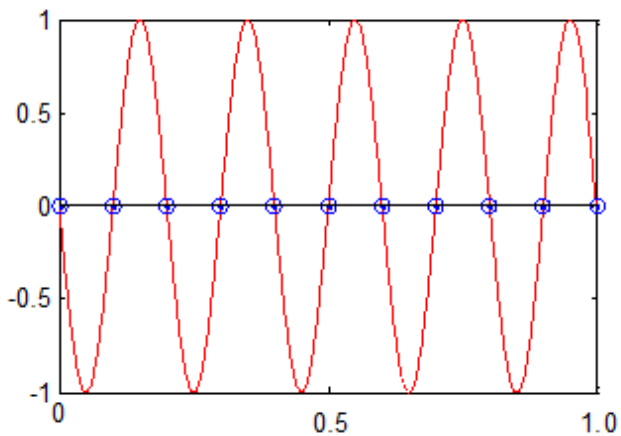
<u>¡Hay que muestrear a más del doble del ancho de banda de la señal!</u>

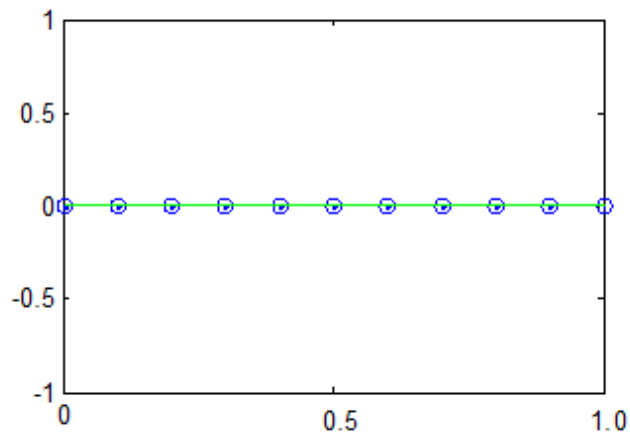
Ejemplos de señales mal muestreadas

- Con una única sinusoide:

$$W=2\pi/\tau \rightarrow \omega_s>2W \rightarrow 2\pi/T>4\pi/\tau \rightarrow T<\tau/2$$



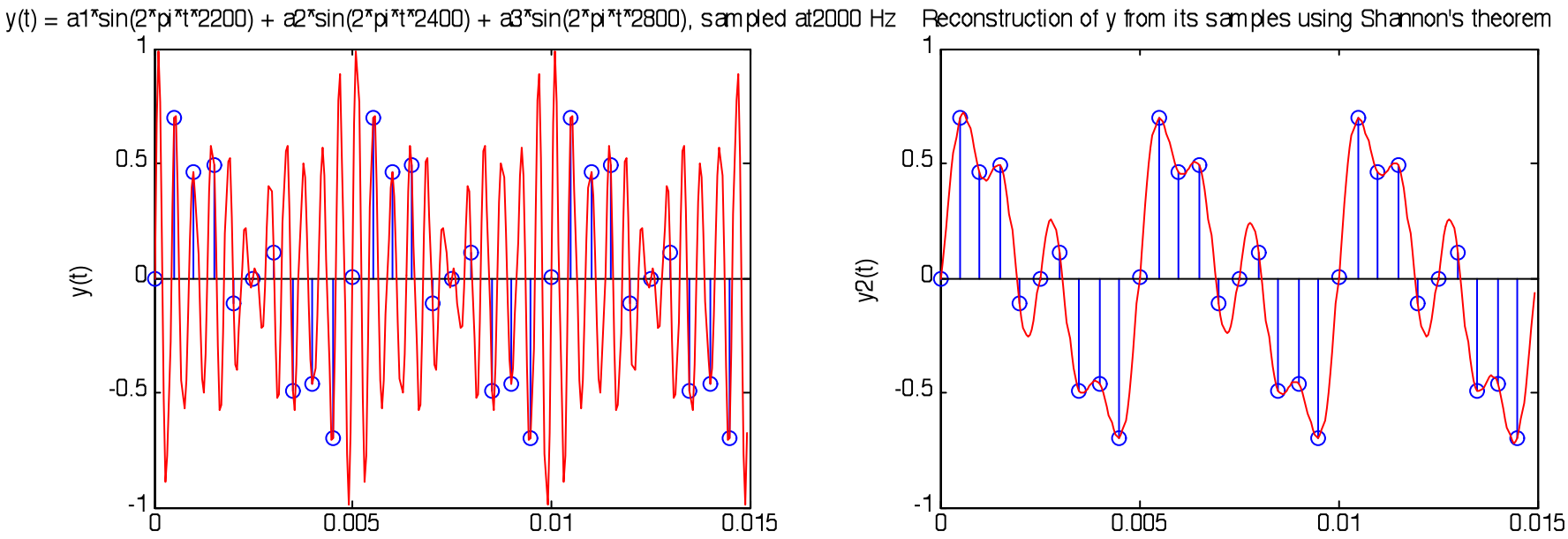




No se cumple teorema de muestreo (por muy poco) ➔ NO FUNCIONA

Ejemplos de señales mal muestreadas

- Con suma de sinusoides:

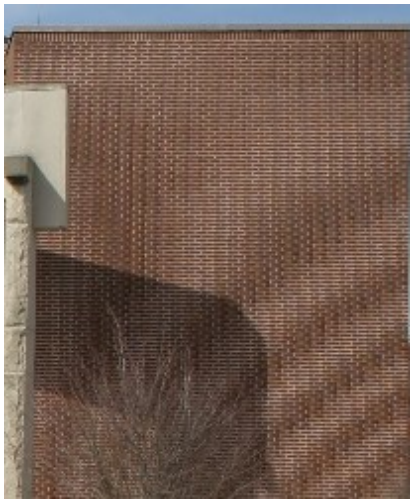


➢ Muestreamos siempre a 2000Hz ➔ Tendremos problemas en cuanto la SC tenga un BW mayor que 1000Hz

Demo disponible en:
http://www-mmdb.iai.uni-bonn.de/lehre/BIT/ss03_DSP_Vorlesung/matlab_demos/index.html

Ejemplos de señales mal muestreadas

- Con imágenes:



- Con vídeos:

http://www.youtube.com/watch?v=UiTUiop9etk&feature=related

Muestreo e interpolación ideal: resumen

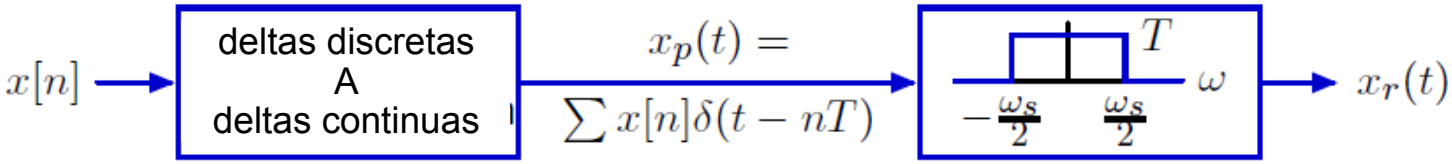
- Muestreo interfaz continuo-discreto: ¿cómo muestreamos? ¿cuándo podemos recuperar la SC a partir de la SD?

- Para entender el proceso de muestreo: M1) Muestreo en tiempo 2) Muestreo en frecuencia 3) Reconstrucción en frecuencia 4) Reconstrucción en tiempo

- <u>Tres resultados fundamentales para recordar:</u>

➢ Muestreo $x(t) \rightarrow x[n] = x(nT)$

➢ Recons-trucción



➢ Teorema de muestreo

Si $X(j\omega) = 0 \ \forall \ |\omega| > \frac{\omega_s}{2}$, entonces $x_r(t) = x(t)$

Clave: $X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right)\right)$