Formulas útiles para el Muestreo

Periodicidad TF discreta

$$e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j\Omega n} e^{j2\pi n}$$

$$e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j\Omega n} \times 1$$

$$\boxed{e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j\Omega n}}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

$$X(\Omega+2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j(\Omega+2\pi)n} = X(\Omega)$$

Para Recordar:

Para ahora:

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\delta(t)\right\} = 1}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\delta(t-t_0)\right\} = e^{-j\omega t_0}}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)}$$

Y para después:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau = x(t-t_0)$$

$$\boxed{x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)}$$

$$\boxed{x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]}$$

Igualdades y transformadas de un tren de deltas

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT)$$

se puede interpretar como una señal periódica de periodo T

(una delta repetida periódicamente)

y se puede expresar con una serie de Fourier:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \qquad \text{para cada } k$$

Asi que la série de Fourier es:

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{+jk\frac{2\pi}{T}t}$$

Igualdades y transformadas de un tren de deltas

PRIMERA IGUALDAD: (USANDO SERIE DE FOURIER)

$$\boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{+jk\frac{2\pi}{T}t}}$$

Usando la TRANSFORMADA DE FOURIER de la expresión a la derecha:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT)\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{+jk\frac{2\pi}{T}t}\right\} \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\left\{e^{+jk\frac{2\pi}{T}t}\right\} \\
&= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)
\end{aligned}$$

Igualdades y transformadas de un tren de deltas

Llegamos a: (Transformada de un tren de deltas continuas)

$$\boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT) \Longleftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)}$$

Por otro lado si transformamos el primer termino:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT)\right\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\left\{\delta(t - mT)\right\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-jmT\omega}$$

Asi que....

Igualdades y transformadas de un tren de deltas

OTRA IGUALDAD:

$$\boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-jmT\omega} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)}$$